4.5 Schranken an die Dichte von Kugelpackungen

Schon in Abschnitt 1.4 hatten wir die Dichte einer Kugelpackung, speziell eines Gitters bzw. einer quadratischen Form, eingeführt; in den Abschnitten 4.1 und 4.3 hatten wir einige prinzipielle Einsichten über die Extremstellen der Dichtefunktion auf dem Raum der quadratischen Formen gewonnen. Die zugehörigen expliziten Verfahren sind allerdings in höheren Dimensionen nicht durchführbar und ungeeignet, Aussagen über das Verhalten der bestmöglichen Kugelpackungsdichte Δ_n bzw. der in Definition 1.4.6 eingeführten Hermite-Zahl γ_n als Funktion der Dimension n herzuleiten. Mit dieser Frage beschäftigen wir uns im folgenden, wobei es genauer um untere und obere Abschätzungen für γ_n gehen wird.

Weiterhin ist V ein euklidischer Vektorraum, $n = \dim V$, und L ein Gitter auf V. Wir erinnern an die Packungsdichte von L gemäß Satz 1.4.5 und ihren Zusammenhang mit der Hermite-Zahl $\gamma(L)$:

$$\Delta(L) = \frac{\omega_n}{2^n}\frac{(\min L)^{n/2}}{\operatorname{vol} L} = \frac{\omega_n}{2^n}\frac{(\min L)^{n/2}}{\sqrt{\det L}} = \frac{\omega_n}{2^n}\,\gamma(L)^{n/2}\,, \tag{4.5.1}$$

wobei wie früher ω_n das Volumen der Einheitskugel ist. Wir erinnern daran, dass das Supremum der $\gamma L)$ über alle (Isometrieklassen von) Gittern der Dimension n angenommen wird, nämlich von den endlich vielen absolut extremem Gittern oder Kantenformen des Minkowski'schen Reduktionsbereiches. Es handelt sich um die Hermite-Konstante γ_n. Entsprechend definieren wir nun

$$\Delta_n = \sup_L \Delta(L) = \frac{\omega_n}{2^n}\,\gamma_n^{n/2}. \tag{4.5.2}$$

Die Konstante Δ_n ist also die bestmögliche Dichte einer gitterförmigen Kugelpackung im n-dimensionalen euklidischen Raum; sie hat keinen besonderen Namen.

Wir stellen nun eine klassische obere Schranken für die beste erreichbare Dichte einer Kugelpackung vor. Sie gilt für beliebige, nicht nur für gitterförmige Kugelpackungen. Der folgende Satz besagt insbesondere, dass $\Delta_n \to 0$ für $n \to \infty$, d. h. mit wachsender Dimension ist die Gestalt einer Kugel immer schlechter für dichte Packungen geeignet; für sehr große n bleibt fast der gesamte Raum leer, gleichgültig wie man die Mittelpunkte wählt.

Satz 4.5.1 (Blichfeldt) *Für die Dichte von Kugelpackungen im n-dimensionalen euklidischen Raum gilt die obere Abschätzung*

$$\Delta_n \leq \frac{1+n/2}{2^{n/2}}.$$

Beweis: Im folgenden wird nicht vorausgesetzt, dass die Menge L der Kugelmittelpunkte ein Gitter bildet. Sie muss lediglich gleichmäßig diskret sein, damit eine Packung von Kugeln mit festem Radius überhaupt möglich ist. Wir ändern das

Skalarprodukt um einen konstanten Faktor so ab, dass die Kugeln den Radius 1 haben. Es gilt dann $\|v - w\| \geq 2$ für alle $v, w \in L$, $v \neq w$. Wir betrachten nun eine „große“ Kugel

$$B(t) = \{x \mid \|x\| < t\}, \quad t \to \infty$$

und zählen die Kugeln der Packung, die ganz in $B(t)$ enthalten sind:

$$\beta_t := |\{v \in L \mid v + B \leq B(t)\}| \tag{4.5.3}$$

(hier ist $B = B(1)$ die Einheitskugel). Es ist also $\beta_t \omega_n$ das innerhalb von $B(t)$ durch ganze Kugeln überdeckte Volumen (angeschnittene Kugeln am Rand der großen Kugel sind nicht berücksichtigt). Falls L ein Gitter ist, so gilt

$$\Delta(L) = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta_t\, \omega_n}{\operatorname{vol} B(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\beta_t}{t^n}; \tag{4.5.4}$$

siehe auch Satz 1.4.5. Zum Beweis der Konvergenz nähert man $B(t)$ möglichst gut durch eine Vereinigung von Fundamentalbereichen an; die Differenz im überdeckten Volumen ist von der Größenordnung t^{n-1} und somit zu vernachlässigen.

Wir zeigen nun für beliebiges L die Abschätzung

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\beta_t}{t^n} \leq \frac{1 + n/2}{2^{n/2}}, \tag{4.5.5}$$

womit der Satz dann bewiesen ist. Betrachte hierzu die folgende Funktion auf dem $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 - \|x\|^2/2 & , \text{ falls } \|x\| \leq \sqrt{2} \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases} \tag{4.5.6}$$

Der Kern des Beweises steckt in der folgenden Ungleichung:

$$\sum_{v\in L} \varphi(x - v) \leq 1 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.5.7}$$

Für den Beweis dieser Ungleichung folgen wir dem Buch von C. L. Siegel, „Lectures on the Geometry of Numbers“, Seite 125. Man beachte, dass auf jeder beschränkten Menge nur eine endliche Summe von Funktionen $x \mapsto \varphi(x - v)$ gebildet wird; insbesondere ist die linke Seite von (4.5.7) eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$.

Wir werten nun das Integral

$$I_t := \int_{B(t)} \sum_{v\in L} \varphi(x - v)dx\,.$$

auf zwei verschiedene Weisen aus. Einerseits gilt, da wir für festes t nur eine endliche Summe haben,

$$I_t = \sum_{v\in L} \int_{B(t)} \varphi(x - v)dx\,.$$

Wir berücksichtigen in dieser Summe nur solche $v \in L$, für die die Kugel $v+B(\sqrt{2})$ ganz in $B(t)$ enthalten ist; setze also

$$\alpha_t := |\{v \in L \mid v + B(\sqrt{2}) \subseteq B(t)\}| \,. \tag{4.5.8}$$

Da $\varphi(x-v)$ außerhalb von $v + B(\sqrt{2})$ Null ist, können wir schreiben

$$I_t \geq \alpha_t \int\limits_{\|x\| \leq \sqrt{2}} \varphi(x)dx \,. \tag{4.5.9}$$

Da $\varphi(x)$ nur von $r = \|x\|$ abhängt, rechnet man in Polarkoordinaten sofort aus, dass

$$\int\limits_{\|x\| \leq \sqrt{2}} \varphi(x)dx = \omega_n \frac{2^{n/2}}{1+n/2} \,. \tag{4.5.10}$$

Andererseits gilt nach (4.5.7)

$$I_t \leq \operatorname{vol} B(t) = t^n \omega_n \,. \tag{4.5.11}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\alpha_t \frac{2^{n/2}}{1+n/2} \leq t^n \quad \text{bzw.} \quad \frac{\alpha_t}{t^n} \leq \frac{1+n/2}{2^{n/2}} \,. \tag{4.5.12}$$

Die Behauptung (4.5.5) ist bewiesen, wenn wir noch zeigen, dass

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\beta_t - \alpha_t}{t^n} = 0. \tag{4.5.13}$$

Es ist $\beta_t - \alpha_t$ die Anzahl der Kugeln, deren Mittelpunkt v in L und im Streifen

$$S' = \{v \mid t - \sqrt{2} < \|v\| \leq t - 1\}$$

liegt. Diese Kugeln sind im breiteren Streifen

$$S = \{x \mid t - \sqrt{2} - 1 \leq \|x\| \leq t\}$$

ganz enthalten. Also ist

$$\begin{aligned} (\beta_t - \alpha_t)\omega_n \leq \operatorname{vol} S \;&= \omega_n(t^n - (t - \sqrt{2} - 1)^n) \\ &= \omega_n(n(1+\sqrt{2})t^{n-1} + \ldots t^{n-2} + \ldots), \end{aligned}$$

womit die Ungleichung (4.5.13) offensichtlich wird. □

Wir beweisen nun eine ebenfalls klassische untere Schranke für die Kugelpackungsdichte. Sie beruht auf einem nicht-konstruktiven Existenzsatz, der unten als Lemma 4.5.3 formuliert wird.

Satz 4.5.2 (Minkowski) *Für die Hermite-Konstante bzw. die bestmögliche Dichte von Kugelpackungen in Dimension n gilt die untere Abschätzung*

$$\gamma_n \geq \left(\frac{2}{\omega_n}\right)^{2/n} \quad \textit{bzw.} \quad \Delta_n \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

Der Beweis beruht auf folgendem

Lemma 4.5.3 Es sei $f \geq 0$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger auf $\mathbb{R}^n$. Dann existiert für jedes $\delta > 0$ ein Gitter der Determinante 1 mit

$$\sum_{v \in L \setminus \{0\}} f(v) < \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx + \delta.$$

Den Beweis dieses Lemmas reproduzieren wir unten aus dem Buch *Symmetric Bilinear Forms* von J. Milnor und D. Husemoller, Springer-Verlag 1973, S. 31 f.

Beweis von Satz 4.5.2: Das Lemma wird auf eine Approximation der charakteristischen Funktion $\chi_{B(r)}$ der Kugel von einem geeigneten Radius r angewendet. Genauer benutzen wir ein stetiges $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, das nur von $\|x\|$ abhängt, mit

$$f(x) = f_{r,s}(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } \|x\| \leq r, \\ 0 \text{ für } \|x\| \geq s. \end{cases}$$

Dabei ist $s > r$ nahe bei r gewählt, und zwar so, dass $s < (2/\omega_n)^{1/n}$. Dann gilt

$$\int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \int_{x \in B(s)} 1dx = \omega_n s^n < 2. \tag{4.5.14}$$

Nach dem Lemma 4.5.3 existiert ein Gitter L der Determinante 1 mit

$$\sum_{v \in L \setminus \{0\}} f(v) < 2. \tag{4.5.15}$$

Für dieses Gitter gilt $\min L = \gamma(L) > r^2$, denn wenn L ein Paar $\pm v \in L \setminus 0$ von Vektoren mit $\|v\| \leq r$ enthalten würde, dann würden diese einen Beitrag ≥ 2 in der Summe von (4.5.15) liefern. Da r beliebig nahe an s und s beliebig nahe an $(2/\omega_n)^{1/n}$ gewählt werden kann, folgt für die Hermite-Konstante $\gamma_n = \sup \gamma(L) \geq (2/\omega_n)^{2/n}$, wie behauptet. □

(or rather the slightly sharper lower bound $\mu(L_n) \geqq (2\zeta(n)/\omega_n)^{2/n}$) was proved by Minkowski in 1905. The name of E. Hlawka is often attached to this inequality since a generalization, stated by Minkowski, was first proved by Hlawka. Sharper inequalities of this form have been given by W. Schmidt, Rogers and others, but these all have the same asymptotic behavior as $n \to \infty$. Compare [Rogers, 1964]. A version involving self-dual lattices will be proved in § 9.5.

Proof of the inequality $\mu(L_n) \geqq (2/\omega_n)^{2/n} > \omega_n^{-2/n}$. The notation $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ will be used for a point in $\mathbf{R}^n$. Let $f(x) = f(\xi_1, \ldots, \xi_n) \geqq 0$ be a continuous real valued function with compact support. The integral $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n$ will be written briefly as $\int f(x)\,dx$. We will first prove the following. Assume that $n \geqq 2$.

(7.3) Lemma. *Given any real number $\beta > \int f(x)\,dx$, there exists a unimodular lattice $L \subset \mathbf{R}^n$ so that the sum $\sum_{x \in L-0} f(x)$ is less than β.*

Proof. Let $e_1, \ldots, e_n$ be the standard orthonormal basis for $\mathbf{R}^n$. Let $\varepsilon > 0$ be a fixed small number, to be chosen later, and define $\lambda > 0$ by the equation $\varepsilon \lambda^{n-1} = 1$. Given real parameters $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ we consider the unimodular lattice $L = L(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ which is spanned by the basis

$$\lambda e_1, \ldots, \lambda e_{n-1}, \qquad \tau_1 \lambda e_1 + \cdots + \tau_{n-1} \lambda e_{n-1} + \varepsilon e_n.$$

Thus a typical element of this lattice $L(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ is the n-tuple

$$(\lambda(i_1 + j\tau_1), \ldots, \lambda(i_{n-1} + j\tau_{n-1}), j\varepsilon)$$

where $i_1, \ldots, i_{n-1}$ and j range independently over $\mathbf{Z}$. Clearly the lattice $L(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ remains unchanged if we add an integer to any one of the parameters τ_ν.

Fixing ε, for each value of the parameters $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ modulo 1 consider the sum

$$(1) \qquad \sum_{x \in L(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) - 0} f(x) = \sum{}' f(\lambda(i_1 + j\tau_1), \ldots, \lambda(i_{n-1} + j\tau_{n-1}), j\varepsilon),$$

where the latter sum extends over all n-tuples $i_1, \ldots, i_{n-1}, j$ of integers, not all zero. Since f has compact support, we may choose ε so small that

$$f(\lambda i_1, \ldots, \lambda i_{n-1}, 0) = 0$$

for $(i_1, \ldots, i_{n-1}) \neq (0, \ldots, 0)$. If ε is so chosen, then the terms with $j = 0$ make no contribution, so we can rewrite the sum (1) as

$$(1') \qquad \sum_{j \neq 0} S_j(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$$

where

$$S_j(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}) = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} f(\lambda(i_1 + j\tau_1), \ldots, \lambda(i_{n-1} + j\tau_{n-1}), j\varepsilon)$$

is zero for $|j|$ large. Next consider the average

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{j \neq 0} S_j(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1}$$

(2)

$$= \sum_{j \neq 0} \int_0^1 \cdots \int_0^1 S_j(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})\, d\tau_1 \ldots d\tau_{n-1}$$

as $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ vary from 0 to 1. If $j > 0$, then the substitution $\eta_\nu = j\tau_\nu$ transforms the latter integral into

$$j^{1-n} \int_0^j \cdots \int_0^j \sum_{i_1 \ldots i_{n-1}} f(\lambda(i_1 + \eta_1), \ldots, \lambda(i_{n-1} + \eta_{n-1}), j\varepsilon)\, d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1}.$$

But inspection shows that we are integrating precisely j^{n-1} times over each unit cube in $\mathbf{R}^{n-1}$, so that this expression is precisely equal to

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda\eta_1, \ldots, \lambda\eta_{n-1}, j\varepsilon)\, d\eta_1 \ldots d\eta_{n-1}.$$

A similar argument proves this formula when $j < 0$. Setting

$$g(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \eta)\, d\xi_1 \ldots d\xi_{n-1},$$

this last expression is equal to

$$\lambda^{1-n} g(j\varepsilon) = \varepsilon g(j\varepsilon).$$

Therefore the average (2) is equal to

(3) $$\sum_{j \neq 0} \varepsilon g(j\varepsilon).$$

But the function $g(\eta)$ is continuous with compact support, so the sum (3) clearly converges, as $\varepsilon \to 0$, to the Riemann integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta)\, d\eta = \int f(x)\, dx < \beta.$$

Choosing ε so small that the Riemann sum (3) is less than β, it follows that the average (2) is also less than β. Therefore there must exist actual parameter values $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ so that the sum (1) = (1′) is less than β. This completes the proof of (7.3). □

To prove Theorem 7.2, we make a particular choice of the function f. Let $r < s$ be positive real numbers which are less than $(2/\omega_n)^{1/n}$. Choose f so that

$$f(x) = 1 \quad \text{for } x \cdot x \leqq r^2$$

$$f(x) = 0 \quad \text{for } x \cdot x \geqq s^2,$$

Man beachte den nicht-konstruktiven Aspekt zum Schluss des Beweises: *Therefore there must exist actual parameter values* $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ *so that ....*