II Extreme Gitter.

4 Dichte Kugelpackungen.

Definition 4.1 *Sei $L \in (\mathbb{R}^n, (\,,\,))$ ein Gitter. Dann ist*

$$\min(L) := \min\{(\ell,\ell) \mid 0 \neq \ell \in L\}$$

das Minimum *von L und*

$$S(L) := \{\ell \in L \mid (\ell,\ell) = \min(L)\}$$

die Menge der kürzesten Vektoren von L. Nach Satz 1.9 ist $S(L) = \{\ell_1, \ldots, \ell_k\}$ eine endliche Menge. $k = |S(L)|$ heißt auch die Kußzahl *oder auch* kissing number *von L.*

$\frac{1}{2}\sqrt{\min(L)}$ ist der Radius der Kugeln in der zu L gehörenden Kugelpackung. Die Kußzahl ist die Anzahl der Kugeln in der Gitterkugelpackung, die eine feste weitere Kugel berühren.

Definition 4.2 *Bezeichne $\mathcal{L}_n$ die Menge aller n-dimensionalen Gitter. Die* Hermite-Funktion *$\gamma : \mathcal{L}_n \to \mathbb{R}_{>0}$ ist definiert durch*

$$\gamma(L) := \frac{\min(L)}{\det(L)^{1/n}}.$$

$\gamma_n := \sup\{\gamma(L) \mid L \in \mathcal{L}_n\}$ heißt die Hermite-Konstante.

Bemerkung 4.3 *Die Dichte der zu L gehörenden gitterförmigen Kugelpackung ist*

$$\Delta(L) = 2^{-n}\gamma(L)^{n/2}V_n$$

wobei V_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet. Insbesondere ist $\Delta(L)$ maximal, genau dann wenn $\gamma(L)$ maximal ist.
Das Ziel dieses Abschnitts ist es, einen Algorithmus anzugeben, der die lokalen Maxima von γ auf dem Raum der Ähnlichkeitsklassen von n-dimensionalen Gittern bestimmt.
Dazu müssen wir zunächst auf $\mathcal{L}_n$ eine Topologie definieren.

Hermite Funktion auf Wurzelgittern.

L	$\mathbb{A}_2$	$\mathbb{A}_3$	$\mathbb{A}_4$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_5$	$\mathbb{D}_6$	$\mathbb{E}_6$	$\mathbb{E}_7$	$\mathbb{E}_8$
$\gamma(L)$	1.155	1.260	1.337	1.414	1.516	1.587	1.665	1.811	2

Bemerkung 4.4 *(a) Die Hermite-Funktion $\gamma : \mathcal{L}_n \to \mathbb{R}_{>0}$ ist konstant auf den Isometrieklassen von Gittern, d.h. $\gamma(L) = \gamma(L')$ falls $L \cong L'$. Sie ändert sich auch nicht bei Skalieren*

$\gamma(sL) = \gamma(L)$ *für alle* $s \in \mathbb{R}_{>0}$. *Also ist* γ *eine Funktion auf der Menge der* Ähnlichkeitsklassen *von* n*-dimensionalen Gittern,* $\gamma : \mathcal{L}_n/(\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}_{>0}$, $[L] \mapsto \gamma(L)$.
(b)

$$\mathrm{Gram} : \mathcal{L}_n/(\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}_{>0} \backslash \mathbb{R}^{n\times n}_{sym,>0} / \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) =: \mathrm{Quad}_n, [L] \mapsto [\mathcal{G}(B)]$$

wo B *eine Gitterbasis von* L *ist, ist eine Bijektion.*
(c) Auf $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) := \mathbb{R}^{n\times n}_{sym} := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^{tr}\}$ *definiert* $(A, B) := \mathrm{Spur}(AB)$ *ein Skalarprodukt und macht* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *zu einem Euklidischen Vektorraum* $(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}), \mathrm{Spur})$ *(der Dimension* $n(n+1)/2$*). Diese Skalarprodukt definiert auch eine Topologie auf* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$.

Definition 4.5 *Sei* $F \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *positiv definit.*
(i) $\min(F) := \min\{\ell F \ell^{tr} \mid 0 \neq \ell \in \mathbb{Z}^n\}$ *heißt das* Minimum *von* F.
(ii) $S(F) := \{\ell \in \mathbb{Z}^n \mid \ell F \ell^{tr} = \min(F)\}$ *die Menge aller kürzesten Vektoren von* F.
(iii) $\gamma(F) := \frac{\min(F)}{\det(F)^{1/n}}$ *die* Hermite-Funktion *bei* F.

Bemerkung 4.6 $\gamma(aF) = \gamma(F)$ *für alle* $a \in \mathbb{R}_{>0}$.
$\gamma(TFT^{tr}) = \gamma(F)$ *für alle* $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
$\gamma(L) = \gamma([L]) = \gamma(\mathrm{Gram}(L))$.

Definition 4.7 *Ein Gitter* $L \in \mathcal{L}_n$ *heißt* extrem *, falls* $[L]$ *ein lokales Maximum der Hermite Funktion* $\gamma : \mathcal{L}_n/(\mathbb{R}^* O_n(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}$ *ist, also falls es eine Umgebung* $\mathcal{U}$ *von* $F := \mathrm{Gram}(L)$ *in* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *gibt, so dass* $\gamma_{|\mathcal{U}}$ *sein Maximum in* F *annimmt.*

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts ist die Voronoi'sche Charakterisierung extremer Gitter Satz 4.19 (unten).

Definition 4.8 *Eine positive definite Matrix* $F \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *heißt* perfekt *, falls*

$$\langle x^{tr} x \mid x \in S(F) \rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

Beachten Sie, dass diese Definition koordinatenunabhängig ist. Ist $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ so sind die beiden Vektorräume $\langle (xT)^{tr}(xT) \mid x \in S(F)\rangle_{\mathbb{R}}$ und $\langle x^{tr} x \mid x \in S(F)\rangle_{\mathbb{R}}$ isomorph.

Bemerkung 4.9 *Ist* $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, $s \in \mathbb{R}_{>0}$ *so ist* F *perfekt* $\Leftrightarrow$ $sTFT^{tr}$ *perfekt. Perfektion ist also eine Eigenschaft der Klasse von* F *in* Quad_n. *Ein Gitter* $L \in \mathcal{L}_n$ *heißt* perfekt, *falls* $\mathrm{Gram}(L) \in \mathrm{Quad}_n$ *perfekt ist.*

Ende am 27.4.07

Satz 4.10 *(Korkine, Zolotareff)* $F \in \mathrm{Sym}_{n,>0}(\mathbb{R})$ *ist perfekt, genau dann wenn*

$$\{F\} = \{A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \mid xAx^{tr} = \min(F) \text{ für alle } x \in S(F)\}.$$

Die Matrix F *ist durch ihre kürzesten Vektoren eindeutig bestimmt.*

Beweis. Sei $A \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ eine weitere Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $xAx^{tr} = \min(F)$ für alle $x \in S(F)$. Dann ist für alle $x \in S(F)$

$$x(A-F)x^{tr} = \mathrm{Spur}(x(A-F)x^{tr}) = \mathrm{Spur}(x^{tr}x(A-F)) = 0$$

also ist $A - F \in \langle x^{tr}x \mid x \in S(F)\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. Dieser Raum ist gleich 0, genau dann wenn F perfekt ist. □

Bemerkung 4.11 *Ist F perfekt, so ist $\frac{1}{2}|S(F)| \geq \dim \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = n(n+1)/2$, also $|S(F)| \geq n(n+1)$.*

Bemerkung 4.12 *Ist F perfekt, so ist $\langle S(F)\rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$.*

Beweis. Ansonsten gibt es ein $0 \neq y \in \mathbb{R}^n$ mit $(y,x)^2 = 0$ für alle $x \in S(F)$. Dann ist

$$0 = (y,x)^2 = (yx^{tr})^2 = yx^{tr}xy^{tr} = \mathrm{Spur}(yx^{tr}xy^{tr}) = \mathrm{Spur}((y^{tr}y)(x^{tr}x))$$

für alle $x \in S(F)$. Also ist die symmetrische Matrix $y^{tr}y$ aus $\langle x^{tr}x \mid x \in S(F)\rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$. □

Folgerung 4.13 *Ist F perfekt, so gibt es ein $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $aF \in \mathbb{Z}^{n\times n}$.*

Beweis. Ersetze F durch $\frac{1}{\min(F)}F$. Dann gilt $\min(F) = 1$ und F ist die einzige Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $xFx^{tr} = 1$ für alle $x \in S(F) \subset \mathbb{Z}^n$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Diese ist rational (Cramer) und daher ist $F \in \mathbb{Q}^{n\times n}$. Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner ist F ganzzahlig. □

Satz 4.14 *(Voronoi) Bis auf Ähnlichkeit gibt es nur endlich viele perfekte Gitter in $\mathcal{L}_n$. $\mathrm{Perf}_n := \{[L] \in \mathbb{R}_{>0}\backslash\mathcal{L}_n/O_n(\mathbb{R}) \mid L \text{ ist perfekt } \}$ ist endlich.*

Beweis. Sei $F = \mathrm{Gram}(L)$ perfekt. Œ sei $\min(F) = 1$. Wähle n linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n \in S(L)$. Dann ist nach Folgerung 1.8

$$\det(L) \leq \det\langle x_1, \ldots, x_n\rangle_{\mathbb{Z}} \leq \prod_{i=1}^{n}(x_i, x_i) \leq 1.$$

Sei $C_n := (4/3)^{n(n-1)/2}$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ eine nach Satz 3.4 existierende Gitterbasis von L mit

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i, b_i) \leq C_n \det(L) \leq C_n.$$

Dann ist auch $(b_i, b_i) \leq \frac{C_n}{\prod_{j\neq i}(b_j,b_j)} \leq C_n$. Ist $x = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in L$, so ist

$$a_i^2 = \frac{\det(\langle b_1, \ldots, b_{i-1}, x, b_{i+1}, \ldots, b_n\rangle_{\mathbb{Z}})}{\det(L)} \leq C_n \frac{\prod_{j\neq i}(b_j, b_j)(x,x)}{\prod_{j=1}^{n}(b_j, b_j)} = C_n \frac{(x,x)}{(b_i, b_i)} \leq C_n(x,x).$$

Also gilt für $x \in S(L)$, dass $|a_i| \leq \sqrt{C_n}$.
Also gibt es eine Matrix $TFT^{tr} \in [F]$ mit $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ so dass $S(F) \subset \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \mid |a_i| \leq \sqrt{C_n} = (4/3)^{n(n-1)/4}\}$. Diese Menge ist aber endlich, hat also auch nur endlich viele Teilmengen. Da F nach Satz 4.10 durch $S(F)$ eindeutig bestimmt ist, gibt es auch nur endlich viele Möglichkeiten für F. □

Beispiel 4.15 $\mathbb{A}_2$ *ist einziges 2-dimensionales perfektes Gitter.*

Beweis. $\mathbb{A}_2$ ist perfekt (leicht nachzurechnen, oder siehe Beispiel 4.18). Ist $F \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ perfekt, so ist $|S(F)| \geq 2 \cdot 3 = 6$. Weiter gibt es nach obigem Beweis eine zu F äquivalente Form F' so dass

$$S(F') \subset \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid |a_i| \leq (4/3)^{1/2} < 2\}$$

Insbesondere enthält $S(F)$ eine Basis von $\mathbb{Z}^2$. Bezüglich einer solchen Basis ist $F = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $b = \pm a/2$ also F ähnlich zu $\mathbb{A}_2$. □

Im nächsten Abschnitt werden wir einen Algorithmus kennenlernen, der es ermöglicht, alle perfekten Gitter aufzulisten. Mit dem Hauptsatz 4.19 liefert dies einen Algorithmus zur Bestimmung aller extremen Gitter und damit auch zur Berechnung der Hermite-Konstante γ_n.

Definition 4.16 *Eine positiv definite Matrix* $F \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *heißt* eutaktisch, *falls es Zahlen* $\rho_x > 0$ *für alle* $x \in S(F)$ *gibt mit*

$$F^{-1} = \sum_{x \in S(F)} \rho_x x^{tr} x.$$

Bemerkung 4.17 *Eutaktisch zu sein ist eine Eigenschaft von* $[F] \in \mathrm{Quad}_n$. *Daher nennen wir ein Gitter* L eutaktisch, *genau dann wenn* $\mathrm{Gram}(L)$ *eutaktisch ist.*

Beweis. Für $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ ist $S(TFT^{tr}) = S(F)T^{-1}$ und es gilt

$$(TFT^{tr})^{-1} = T^{-tr}F^{-1}T^{-1} = T^{-tr}(\sum_{x \in S(F)} \rho_x x^{tr} x)T^{-1} = \sum_{x \in S(F)} \rho_x (xT^{-1})^{tr} xT^{-1}.$$

□

Beispiel 4.18 I_n *ist eutaktisch aber nicht perfekt.*
$\mathbb{A}_n$ *ist eutaktisch und perfekt. Eine mögliche Grammatrix von* $\mathbb{A}_n$ *ist* $A_n := I_n + J_n$ *mit* $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \{1\}^{n \times n}$. *(In der Beschreibung* $\mathbb{A}_n = \{\sum_{i=1}^{n+1} a_i z_i \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum a_i = 0\}$ *wo* $(z_1, \dots, z_{n+1})$ *eine ON-Basis von* $\mathbb{Z}^{n+1}$ *ist, ist* $(z_1 - z_2, \dots, z_1 - z_{n+1})$ *eine Gitterbasis von* $\mathbb{A}_n$ *mit Grammatrix* A_n.*) Dann gilt* $S(A_n) = \{\pm e_i, e_i - e_j \mid 0 \leq i \neq j \leq n\}$ *und*

$$A_n^{-1} = I_n - \frac{1}{n+1} J_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n+1} \sum_{x \in S(A_n)} x^{tr} x.$$

A_n *ist minimal perfekt, d.h.* $S(A_n) = n(n+1)$. *Es ist* $(e_i - e_j)^{tr}(e_i - e_j)$ *die Matrix die an den Stellen* (i,i) *und* (j,j) *eine 1 und bei* (i,j) *und* (j,i) *eine* -1 *stehen hat, und* $e_i^{tr} e_i$ *die Diagonalmatrix mit einer 1 an Stelle* (i,i). *Daraus erkennt man, dass die* $(x^{tr}x \mid x \in \{e_i, e_i - e_j \mid 0 \leq i < j \leq n\}$ *eine Basis von* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *bilden.*

Ziel dieses Abschnittes ist es, den folgenden Satz von Voronoi zu beweisen:

Hauptsatz 4.19 *(Voronoi) Ein Gitter L ist extrem genau dann wenn es perfekt und eutaktisch ist.*

Daraus erhält man dann z.B. dass das Gitter $\mathbb{A}_n$ eine lokal dichteste Kugelpackung liefert.

Folgerung 4.20 *(aus dem Hauptsatz)* $\mathrm{Extr}_n := \{[L] \in \mathbb{R}_{>0}\backslash\mathcal{L}_n/O_n(\mathbb{R}) \mid L \text{ ist extrem } \}$ *ist endlich.*

Anzahl Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\lvert \mathrm{Perf}_n \rvert$	1	1	1	2	3	7	33	10916	≥ 524289
$\lvert \mathrm{Extr}_n \rvert$	1	1	1	2	3	6	30	2408	≥ 12814

4.1 Der Beweis der Voronoischen Charakterisierung extremer Gitter.

Eine kleine Vorbemerkung zu Linearformen und Matrizen, die dem gesamten Beweis zugrundeliegt und einen basisfreien Zugang zu den Begriffen perfekt und eutaktisch liefert.

Bemerkung 4.21 *Sei* $\mathrm{End}_s(E)$ *der Raum aller selbstadjungierten Endomorphismen von* $E = (\mathbb{R}^n, (,))$.

$$\mathrm{End}_s(E) = \{f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n) \mid {}_{B^*}f_B \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})\}.$$

Die Spurbilinearform macht $\mathrm{End}_s(E)$ *zu einem Euklidischen Vektorraum,* $\mathrm{Spur}(f,g) := \mathrm{Spur}(fg)$ *für* $f, g \in \mathrm{End}_s(E)$. *Also liefert uns die Spurbilinearform einen Isomorphismus*

$$\mathrm{Spur}^* : \mathrm{End}_s(E) \to \mathrm{End}_s(E)^* : f \mapsto (g \mapsto \mathrm{Spur}(gf)).$$

Jedes $0 \neq x \in E$ *definiert einen selbstadjungierten Endomorphismus, die Orthogonalprojektion* p_x *auf* $\langle x \rangle_{\mathbb{R}}$ *definiert durch*

$$p_x : v \mapsto \frac{(v,x)}{(x,x)} x.$$

Die Matrix von p_x *bezüglich einer Orthonormalbasis ist* $\frac{1}{(x,x)} x^{tr} x$. *Es ist* $(x,x)\,\mathrm{Spur}^*(p_x) =: \varphi_x$ *mit*

$$\varphi_x(f) = (xf, x).$$

(Achtung, Normierung !)

<u>Beweis.</u> Zur Berechnung von $\varphi_x(f)$ sei $(b_2, \ldots, b_n)$ eine Basis von $x^\perp$, Dann ist $B := (x, b_2, \ldots, b_n)$ eine Basis von E und ${}_B(p_x)_B = \mathrm{diag}(1, 0, \ldots, 0)$. Sei $f \in \mathrm{End}_s(E)$ und (f_{ij}) die Matrix von f bezüglich B. Dann ist $\mathrm{Spur}(fp_x) = f_{11}$ und $xf = f_{11}x + z$ mit $z \in x^\perp$. Also ist $f_{11} = \frac{(x,xf)}{(x,x)}$. □

Bemerkung 4.22 *Die Bedingung dass $F \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ perfekt ist, bedeutet dass die $\{\varphi_x \mid x \in S(F)\}$ den Dualraum $\mathrm{End}_s(E)^*$ erzeugen. Die Eutaxiebedingung*

$$\star \quad F^{-1} = \sum_{x \in S(F)} \rho_x x^{tr} x$$

mit positiven ρ_x liest sich in der Sprache der Linearformen wie folgt: Ist B eine Basis mit Grammatrix F, so ist $F^{-1} = \ _{B^*}\mathrm{id}_B$. Ist x die Koordinatenzeile bezüglich der Basis B, so ist $x^{tr}x = (x,x)_{B^*}(p_x)_B$. Also liest sich $\star$ als

$$\mathrm{id} = \min(F) \sum_{x \in S(F)} \rho_x p_x$$

was unter der Identifikation mit dem Dualraum übergeht zu

$$\mathrm{Spur} = \sum_{x \in S(F)} \rho_x \varphi_x$$

als Gleichung für Linearformen auf $\mathrm{End}_s(E)$.

Dies zeigt unter anderem, dass die Eigenschaft eines Gitters perfekt, bzw. eutaktisch zu sein nur von der Geometrie der Menge der kürzesten Vektoren abhängt.

Definition 4.23 *Sei $M \subset E$ eine endliche Menge von Vektoren im Euklidischen Raum.*
(i) M heißt perfekt *, falls*

$$\langle \varphi_x \mid x \in M \rangle = \mathrm{End}_s(E)^*.$$

(ii) M heißt eutaktisch *, falls Zahlen $\rho_x > 0$ (für alle $x \in M$) existieren mit*

$$\mathrm{Spur} = \sum_{x \in M} \rho_x \varphi_x.$$

Ein Gitter, oder auch eine symmetrische positiv definite Matrix, ist also eutaktisch bzw. perfekt, genau dann, wenn seine Menge von kürzesten Vektoren eutaktisch bzw. perfekt ist.

Der Rest des Abschnitts ist einem Beweis des Hauptsatzes 4.19 gewidmet. Dazu zunächst ein Satz von allgemeinem Interesse:

Satz 4.24 *(Stiemke, 1915) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\varphi_1, \ldots, \varphi_t \in V^*$. Äquivalent sind:*
(i) $\{x \in V \mid \varphi_j(x) \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq t\} = \bigcap_{i=1}^t \ker(\varphi_i)$.
(ii) Es gibt $a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a_1\varphi_1 + \ldots + a_t\varphi_t = 0$.

<u>Beweis.</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) Ist klar. Ist nämlich $x \in V$ mit $\varphi_j(x) \geq 0$ für alle $1 \leq j \leq t$, so ist auch $0 = \sum_{j=1}^t a_j\varphi_j(x)$ eine Summe von nichtnegativen Zahlen. Also ist $\varphi_j(x) = 0$ für alle j und damit $x \in \bigcap_{i=1}^t \ker(\varphi_i)$.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Wir gehen zu $V/\bigcap_{i=1}^t \ker(\varphi_i)$ über und nehmen an, dass $\bigcap_{i=1}^t \ker(\varphi_i) = \{0\}$, also $V^* = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_t \rangle$. Betrachte

$$\star := \{M \subset \{\varphi_1, \ldots, \varphi_t\} \mid \exists x \in V, \psi(x) \geq 0 \text{ für alle } \psi \in M,\ \psi(x) > 0 \text{ für ein } \psi \in M\}$$

Sei $M \in \star$ eine Menge mit maximaler Kardinalität $|M| =: m$. Œ $M = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$. Dann gilt $\langle M \rangle = V^*$, denn sonst gibt es ein $y \in V$ mit $\varphi_i(y) = 0$ für alle $1 \leq i \leq m$. Da $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_t \rangle = V^*$, gibt es ein φ_s mit $\varphi_s(y) \neq 0$. Wählt man $\lambda \in \mathbb{R}$ so daß $\varphi_s(x + \lambda y) \geq 0$ mit x wie in $\star$, so sieht man, dass $M \cup \{\varphi_s\} \in \star$ ein Widerspruch zur Maximalität von M.
Fall 1: Es ist $t > m+1$: Dann ist $t-1 > m$ und Induktion über t liefert $a'_1, \ldots, a'_{t-1} > 0$ mit $\sum_{i=1}^{t-1} a'_i \varphi_i = 0$. Da $\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_m \rangle = V^*$ gibt es $b_1, \ldots, b_m$ mit $\varphi_t = \sum_{j=1}^m b_j \varphi_j$. Wähle $a_t > 0$ mit $a_i := a'_i - a_t b_i > 0$ für $i = 1, \ldots, m$ und setze $a_i := a'_i$ für $i = m+1, \ldots, t-1$. Dann ist $\sum_{i=1}^t a_i \varphi_i = 0$.
Fall 2: Es ist $t = m+1$. Sei $W := \ker(\varphi_t)$ und wende Induktion an auf $\varphi_{1|W}, \ldots, \varphi_{(t-1)|W}$. Danach gibt es $a_1, \ldots, a_{t-1} > 0$ mit $(\sum_{i=1}^{t-1} a_i \varphi_i)_{|W} = 0$. Nach Definition von m gibt es $x \in V$ mit $\varphi_i(x) \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq m = t-1$ und $\varphi_i(x) > 0$ für ein i. Da m maximal war folgt dann $\varphi_t(x) < 0$. Setze $a_t := -\frac{1}{\varphi_t(x)} \sum_{i=1}^{t-1} a_i \varphi_i(x)$. Dann ist $a_t > 0$ und $\sum_{i=1}^t a_i \varphi_i(x) = 0$. Da $(\sum_{i=1}^t a_i \varphi_i)_{|W} = 0$ ist und $V = \langle W, x \rangle$ folgt $\sum_{i=1}^t a_i \varphi_i = 0$. □

Satz 4.25 *Sei* $0 \neq \alpha \in \mathrm{End}_s(E)$ *und* $J := [-\epsilon, \epsilon]$ *ein Intervall, so dass* $\alpha_t := t\alpha + \mathrm{id}$ *für* $t \in J$ *nur positive Eigenwerte hat. Dann ist die Funktion*

$$f : J \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(\alpha_t)$$

strikt logarithmisch konkav (d.h. $g := \log(f)$ *ist strikt konkav) und* $1/f : J \to \mathbb{R}, t \mapsto \det(\alpha_t)^{-1}$ *ist strikt konvex.*

Beweis. Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von α, so ist $\det(\alpha_t) = \prod_{i=1}^n (1 + \lambda_i t)$. Sei $g := \log(f)$. Dann ist $g' = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i}$ und $g'' = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(1+t\lambda_i)^2} < 0$. Also ist g' streng monoton fallend und damit $g = \log(f)$ strikt konkav.
Sei $\tilde{f} := \frac{1}{f} = \prod_{i=1}^n g_i$ mit $g_i(t) = \frac{1}{1+t\lambda_i}$. Dann ist $\tilde{f}' = \sum_{j=1}^n g'_j \prod_{i \neq j} g_i$ und

$$\tilde{f}'' = \sum_{j=1}^n g''_j \prod_{i \neq j} g_i + \sum_{j \neq k} g'_j g'_k \prod_{i \neq j,k} g_i.$$

Nun ist $g'_i = \frac{-\lambda_i}{(1+\lambda_i t)^2}$ und $g''_i = \frac{2\lambda_i^2}{(1+\lambda_i t)^3}$ also

$$\frac{\tilde{f}''}{\tilde{f}} = \sum_{j=1}^n 2\Big(\frac{\lambda_j}{1+t\lambda_j}\Big)^2 + \sum_{j \neq k} \frac{\lambda_j}{1+t\lambda_j} \frac{\lambda_k}{1+t\lambda_k} > 0$$

da $2\sum x_i^2 + \sum_{i \neq j} x_i x_j$ positiv definit ist. Da aber $\tilde{f} > 0$ auf J ist, ist somit auch $\tilde{f}'' > 0$ und damit $\tilde{f}$ strikt konvex. □

Lemma 4.26 *(i) Es gibt eine Umgebung* $\mathcal{U}$ *von* 0 *in* $\mathrm{End}_s(E)$ *so dass für jedes* $h \in \mathcal{U}$ *mit* $\mathrm{Spur}(h) \leq 0$ *und jedes* $g \in \mathrm{End}(E)$ *mit* $gg^{tr} = \mathrm{id} + h$ *gilt:* $g \in O(E)$ *(also* $h = 0$*) oder* $|\det(g)| < 1$.
(ii) Sei K *ein abgeschlossener Kegel in* $\mathrm{End}_s(E)$ *mit* $\mathrm{Spur}(h) > 0$ *für alle* $0 \neq h \in K$. *Dann gibt es* $\alpha > 0$ *so dass für alle* $h \in K$ *mit* $0 < \mathrm{Spur}(h^2) < \alpha$ *gilt* $\det(\mathrm{id} + h) > 1$.

Beweis. (i) Seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ die Eigenwerte von h. Dann sind $1+\lambda_1,\ldots,1+\lambda_n$ die Eigenwerte von $\mathrm{id}+h$. Bei geeigneter Wahl von $\mathcal{U}$ kann man erreichen dass die $1+\lambda_i$ alle positiv sind für alle $h\in\mathcal{U}$. Betrachte

$$f=f_h:[0,1]\to\mathbb{R}, t\mapsto\det(\mathrm{id}+th)=\prod_{i=1}^n(1+t\lambda_i)$$

und setze $f_1:=\log(f)$. Dann ist $f_1'(t)=\sum_{i=1}^n\frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i}$ und insbesondere $f_1'(0)=\mathrm{Spur}(h)\le 0$
Ist $h=0$, so ist $g\in O(E)$.
Ist $h\neq 0$, so ist so ist nach Satz 4.25 die Funktion f_1 strikt konkav, also f_1' streng monoton fallend und $f_1'(t)\le 0$ für $t\in[0,1]$. Damit ist aber $f_1(1)<f_1(0)=1$ also

$$\det(\mathrm{id}+h)=\exp(f_1(1))<\exp(f_1(0))=1.$$

(ii) Sei $M:=\{h\in\mathrm{End}_s(E)\mid\mathrm{Spur}(h^2)=1\}$ und wähle $h\in K\cap M$ und sei $f_h:t\mapsto\det(\mathrm{id}+th)$, $g_h:=\log(f_h)$ wie eben. Dann ist $g_h'(0)=\mathrm{Spur}(h)>0$ und $g_h(0)=0$. Also gibt es ein $t_h>0$ mit $g_h(t_h)>0$. Die Abbildung

$$\tilde g:K\cap M\to\mathbb{R}, h'\mapsto g_{h'}(t_h)=\log(\prod_{i=1}^n(1+t_h\lambda_i'))$$

ist stetig und positive bei h. Also gibt es eine Umgebung U_h von h in $K\cap M$ mit $\tilde g(h')>0$ für alle $h'\in U_h$. Nun ist $K\cap M$ kompakt (da K abgeschlossen und M kompakt), d.h. es gibt endlich viele h_i $1\le i\le a$ mit

$$K\cap M=\cup_{i=1}^a U_{h_i}.$$

Setze $\alpha:=\min\{t_{h_i}^2\mid 1\le i\le a\}$. Ist nun $h\in K$ mit $0\le\mathrm{Spur}(h^2)\le\alpha$ so ist $h':=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Spur}(h^2)}}h\in M\cap K$ und es gibt ein h_i mit $h'\in U_{h_i}$. Dann ist $g_{h'}(t)>0$ auf $[0,\sqrt{\alpha}]\subset[0,t_{h_i}]$ und daher auch für $t:=\sqrt{\mathrm{Spur}(h^2)}$, d.h. $\det(\mathrm{id}+h)>1$. □

Erinnerung an die Polarzerlegung

Lemma 4.27 *Sei $L\in\mathcal{L}_n$. Dann gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $\mathrm{id}\in\mathrm{End}(E)$, so dass*

$$S(Lg)\subset S(L)g \text{ für alle } g\in\mathcal{U}.$$

Beweis. Sei $m_1:=\min(L)$ und $m_2:=\min\{(x,x)\mid x\in L,(x,x)>m_1\}$. Wir benutzen die Polarzerlegung von $g\in\mathrm{GL}(E)$ als $g=g_og_s$ mit $g_o\in O(E)$ und $g_s\in\mathrm{End}_s(E)$. Wähle $\mathcal{U}$ so klein, dass für alle $g\in\mathcal{U}$ alle Eigenwerte des symmetrischen Anteils g_s positiv sind und für den kleinsten und göss ten Eigenwert $\lambda_{\max}$ bzw. $\lambda_{\min}$ von g_s gilt, dass

$$(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}})^2<\frac{m_2}{m_1}.$$

Dann ist für $x\in L$ mit $(x,x)>m_1$ (d.h. $(x,x)\ge m_2$) und $y\in L$ mit $(y,y)=m_1$

$$(yg,yg)=(yg_s,yg_s)\le\lambda_{\max}^2(y,y)=\lambda_{\max}^2 m_1$$
$$(xg,xg)=(xg_s,xg_s)\ge\lambda_{\min}^2(x,x)\ge\lambda_{\min}^2 m_2>(yg,yg)$$

□

Lemma 4.28 *Es gibt eine Umgebung $\mathcal{U}$ von* $\mathrm{id} \in \mathrm{End}(E)$, *so dass für alle* $g \in \mathcal{U}$ *gilt* $\min(Lg) = \min(L)$ *genau dann wenn* $\min\{\varphi_x(h_g) \mid x \in S(L)\} = 0$ *wobei* $h_g = g_s^2 - \mathrm{id} \in \mathrm{End}_s(E)$.

Beweis. Sei $\mathcal{U}$ so klein, dass $S(Lg) \subset S(L)g$ für alle $g \in \mathcal{U}$ (existiert nach Lemma 4.27). Es ist für $x \in S(L)$:

$$(xg, xg) = (xg_s^2, x) = (x(\mathrm{id} + h_g), x) = \varphi_x(\mathrm{id}) + \varphi_x(h_g) = (x, x) + \varphi_x(h_g).$$

Also ist

$$\min(Lg) = \min(L) + \min\{\varphi_x(h_g) \mid x \in S(L)\}.$$

$\square$

Satz 4.29 *(Korkine, Zolotareff, 1877) Sei $L \in \mathcal{L}_n$. Dann gilt: L ist extrem genau dann wenn für alle $h \in \mathrm{End}_s(E)$ mit $\mathrm{Spur}(h) \leq 0$ und $\min\{\varphi_x(h) \mid x \in S(L)\} = 0$ gilt $h = 0$.*

Beweis. L ist nach Definition extrem, wenn eine Umgebung $\mathcal{U}$ von $\mathrm{id} \in \mathrm{End}(E)$ existiert so dass für $g \in \mathcal{U}$ gilt

$$\gamma(Lg) \geq \gamma(L) \Rightarrow g \in \mathbb{R}^* O(E) \text{ und dann natürlich auch } \gamma(Lg) = \gamma(L).$$

Durch Skalieren mit $\mathbb{R}^*$ können wir uns auf solche $g \in \mathcal{U}$ beschränken, mit $\min(Lg) = \min(L)$. Dann ist $h_g := g_s^2 - \mathrm{id} \in \mathrm{End}_s(E)$ mit $\min\{\varphi_x(h_g) \mid x \in S(L)\} = 0$. Jedes solche h_g liegt dann also in

$$K := \{h \in \mathrm{End}_s(E) \mid \varphi_x(h) \geq 0 \text{ für alle } x \in S(L)\}.$$

Dies ist ein abgeschlossener Kegel in $\mathrm{End}_s(E)$.
$\Rightarrow$: Sei L extrem und $h = h_g \in K$ mit $\mathrm{Spur}(h) \leq 0$. Dann ist nach Lemma 4.26 entweder g orthogonal (und damit $L \cong Lg$) oder $|\det(g)| < 1$ und damit $\det(Lg) < \det(L)$. In diesem Fall ist aber wegen $\min(L) = \min(Lg)$ die Hermite Funktion $\gamma(L) > \gamma(Lg)$.
$\Leftarrow$: Angenommen L ist nicht extrem. Dann gibt es für jede Umgebung $\mathcal{U}$ von id in $\mathrm{End}(E)$ ein $g \in \mathcal{U}$ mit $\min(L) = \min(Lg)$ (also $h_g = g_s^2 - \mathrm{id} \in K$) und $\gamma(Lg) \geq \gamma(L)$ aber $g \notin O(E)$. Dann ist $|\det(g)| \leq 1$ und also

$$\det(g_s^2) = \det(h_g + \mathrm{id}) \leq 1.$$

Wählt man g nahe genug bei id, so kann man h_g beliebig klein machen. Nach Lemma 4.26 (ii) kann dann aber nicht $\mathrm{Spur}(h_g) > 0$ gelten für alle $g \in \mathcal{U}$. Also gibt es ein $0 \neq h_g \in K$ mit $\mathrm{Spur}(h_g) < 0$, ein Widerspruch zur Voraussetzung. $\square$

Beweis. (von Hauptsatz 4.19) Dazu benutzen wir die Charakterisierung von Extremheit in Satz 4.29.
$\Leftarrow$: Sei L eutaktisch und perfekt und betrachte $h \in \mathrm{End}_s(E)$ mit $\min\{\varphi_x(h) \mid x \in S(L)\} = 0$ und $\mathrm{Spur}(h) \leq 0$. Da L eutaktisch ist, gibt es $a_x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\mathrm{Spur}(h) = \sum_{x \in S(L)} a_x \varphi_x(h)$$

Das $\mathrm{Spur}(h) \leq 0$ ist und $\varphi_x(h) \geq 0$ für alle $x \in S(L)$ folgt $\varphi_x(h) = 0$ für alle $x \in S(L)$. Da jetzt L perfekt ist folgt daraus dann $h = 0$, da die φ_x mit $x \in S(L)$ den Raum $\mathrm{End}_s(E)^*$ erzeugen. Also ist L extrem mit Satz 4.29.
$\Rightarrow$: Sei nun L extrem. Zeigen L ist perfekt und eutaktisch.
L ist perfekt: Sei $h \in \mathrm{End}_s(E)$ mit $\varphi_x(h) = 0$ für alle $x \in S(L)$. Œ sei $\mathrm{Spur}(h) \leq 0$, sonst ersetzen wir h durch $-h$. Da L extrem ist folgt nach Satz 4.29, dass $h = 0$ ist. Damit ist aber $\langle \varphi_x \mid x \in S(L) \rangle^\perp = 0$ und also $\langle \varphi_x \mid x \in S(L) \rangle = \mathrm{End}_s(E)$ was bedeutet, dass L perfekt ist.
L ist eutaktisch: Wende Satz 4.24 an auf φ_x ($x \in S(L)$) und $-\mathrm{Spur}$. Dazu genügt es aus den Ungleichungen

$$\varphi_x(h) \geq 0, \ \mathrm{Spur}(h) \leq 0 \text{ für } h \in \mathrm{End}_s(E)$$

zu folgern, dass $h = 0$ ist. Für $r \in \mathbb{R}$ setze $h' := h - r\,\mathrm{id}$. Dann ist $\mathrm{Spur}(h') = \mathrm{Spur}(h) - nr$ und $\varphi_x(h') = \varphi_x(h) - r\min(L)$. Wähle $r \geq 0$ so dass $\min\{\varphi_x(h') \mid x \in S(L)\} = 0$. Dann gilt immer noch $\mathrm{Spur}(h') \leq 0$. Also nach Satz 4.29 ist $h' = 0$. Damit ist aber $h = r\,\mathrm{id}$ für ein $r \geq 0$. Wegen $\mathrm{Spur}(h) \leq 0$ folgt $r = 0$ und somit $h = 0$. □

5 Der Voronoi Algorithmus zur Bestimmung aller perfekter Gitter.

Um Trivialitäten zu vermeiden setzen wir im ganzen Abschnitt voraus, dass die Dimension $n \geq 2$ ist.

Bemerkung 5.1 $\mathrm{Sym}_n^{\geq 0}(\mathbb{R}) =: \mathcal{K}$ *bezeichne den Kegel aller positiv semidefiniten symmetrischen Matrizen. Dies ist ein konvexer abgeschlossener Kegel in* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$*, der den Raum aller symmetrischen Matrizen* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *erzeugt.*
Auf $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *definiert* $(A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$ *ein euklidisches Skalarprodukt wodurch* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *mit seinem Dualraum* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})^*$ *identifiziert wird.*

Definition 5.2 *Sei* $F \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ *positiv definit. Dann bezeichnet* $\mathcal{V}(F)$ *den* Voronoi Bereich *von* F*, das ist der Kegel in* $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$*, der von den symmetrischen positiv semidefiniten Matrizen* $x^{tr}x$ *mit* $x \in S(F)$ *erzeugt wird.*

$$\mathcal{V}(F) := \{ \sum_{x \in S(F)} \lambda_x x^{tr} x \mid \lambda_x \geq 0 \}.$$

Für ein Gitter L *setzen wir*

$$\mathcal{V}(L) := \{ \sum_{x \in S(L)} \lambda_x x^{tr} x \mid \lambda_x \geq 0 \}.$$

Bemerkung 5.3 $\mathcal{V}(F) \subset \mathrm{Sym}_n^{\geq 0}(\mathbb{R})$.
F ist perfekt, genau dann wenn $\mathcal{V}(F)$ nicht leeres Inneres hat, genau dann, wenn $\mathcal{V}(F)$ in keiner Hyperebene von $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ enthalten ist.

Das Hauptergebnis dieses Abschnitts wird sein, dass die Voronoi-Bereiche der perfekten Formen eine face-to-face Pflasterung von $\mathcal{K}$ bilden, d.h. die Vereinigung aller Voronoi-Bereiche perfekter Formen ist ganz $\mathcal{K}$ und der Schnitt zweier benachbarter Voronoibereiche ist eine ganze Seite von jedem der beiden Voronoibereiche.

Lemma 5.4 *Sei $F \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ positiv definit. Dann sind die Kanten von $\mathcal{V}(F)$ genau die Strahlen $\{\mathbb{R}_{>0}x^{tr}x \mid x \in S(F)\}$. Insbesondere ist $S(F)$ durch $\mathcal{V}(F)$ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Den Beweis führen wir in der Sprache der Gitter. Sei also L ein Gitter mit Grammatrix F. Œ sei $\min(L) = 1$. Wir betrachten Koordinatenzeilen bezüglich einer ON-Basis von $\mathbb{R}^n$.
Sei $H := \{X \in \mathrm{Sym}_n^{\geq 0}(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Spur}(X) = 1\}$. Dann ist $P := H \cap \mathcal{V}(L)$ die konvexe Hülle der Rang 1 Matrizen in $\mathcal{X} := \{x^{tr}x \mid x \in S(L)\}$. Insbesondere sind die Ecken von P alle in $\mathcal{X}$. Sei umgekehrt $X = x^{tr}x \in \mathcal{X}$ keine Ecke von P. Dann gibt es $Y_i = y_i^{tr}y_i \in \mathcal{X}$ mit $Y_i \neq X$ für alle i und positive Zahlen $\lambda_i > 0$ mit $\sum_{i=1}^t \lambda_i = 1$ und

$$x^{tr}x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i y_i^{tr} y_i.$$

Sei $z := \max\{(x, y_i)^2 \mid 1 \leq i \leq t\}$. Dann ist $z < 1$, da $x \neq \pm y_i$ für alle i (nach Cauchy-Schwarz). Es ist aber

$$1 = (x, x)^2 = xx^{tr}xx^{tr} = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i (xy_i^{tr})(y_i x^{tr}) \leq \sum_{i=1}^{t} \lambda_i z = z < 1$$

ein Widerspruch. □

Bemerkung zum relativen Inneren.
Sei M eine Teilmenge eines Euklidischen Raums E und $\tilde{E} = \langle M \rangle$ der von M erzeugte Teilraum.
Das relative Innere von M ist die Menge aller $z \in \tilde{E}$, für die eine Umgebung von z in $\tilde{E}$ existiert, die ganz in M liegt. Da Innere von M ist die Menge aller $z \in E$, für die eine Umgebung von z in E existiert, die ganz in M liegt. Insbesondere ist das Innere von M gleich leer, falls $\tilde{E} \neq E$.
Nach Lemma 5.4 ist das relative Innere von $\mathcal{V}(F)$ gleich

$$\{ \sum_{x \in S(F)} \lambda_x x^{tr} x \mid \lambda_x > 0 \text{ für alle } x \in S(F)\}.$$

Denn sei $z = \sum_{x \in S(F)} \lambda_x x^{tr} x$ im relativen Inneren von $\mathcal{V}(F)$. Dann sind die λ_x in der Regel nicht eindeutig und auch nicht notwendigerweise > 0. Sei U eine Umgebung von z, die ganz in $\mathcal{V}(F)$ liegt. Dann gibt es $\epsilon > 0$ mit $z - \epsilon \sum_{x \in S(F)} x^{tr} x \in U$. Also gibt es $a_x \geq 0$ mit $z - \epsilon \sum_{x \in S(F)} x^{tr} x = \sum_{x \in S(F)} a_x x^{tr} x$ und daher ist $z = \sum_{x \in S(F)} (a_x + \epsilon) x^{tr} x$ eine positive Linearkombination der $x^{tr}x$.

Folgerung 5.5 *F ist eutaktisch, genau dann, wenn F^{-1} im relativen Inneren von $\mathcal{V}(F)$ liegt.*

Bemerkung 5.6 *Sei $F \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ positiv definit, so dass $\langle S(F)\rangle = \mathbb{R}^n$. (Man nennt dann F auch* well-rounded *.) Sei G im relativen Inneren von $\mathcal{V}(F)$. Dann ist G auch positiv definit.*

Beweis. Ist G im relativen Inneren von $\mathcal{V}(F)$, so gibt es $\lambda_x > 0$ mit $G = \sum_{x\in S(F)} \lambda_x x^{tr}x$. Dann ist aber für beliebiges $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$:

$$vGv^{tr} = \sum_{x\in S(F)} \lambda_x(vx^{tr}xv^{tr}) = \sum_{x\in S(F)} \lambda_x(xv^{tr})^2 > 0$$

da $v \notin S(F)^{\perp} = 0$ (bezüglich des Standardskalarprodukts). □

Definition 5.7 *Sei F perfekt und $\mathcal{S}$ eine Seite des Voronoi-Bereichs $\mathcal{V}(F)$. Ein* Seitenvektor *(facet vector, vecteur de face) von F zur Seite $\mathcal{S}$ ist eine Matrix $0 \neq R \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ mit $\mathrm{Spur}(RS) = 0$ für alle $S \in \mathcal{S}$ und $\mathrm{Spur}(RT) \geq 0$ für alle $T \in \mathcal{V}(F)$.*

Bemerkung 5.8 *Ist F perfekt und $\mathcal{S}$ eine Seite von $\mathcal{V}(F)$, so ist $R \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ genau dann ein Seitenvektor zu $\mathcal{S}$, wenn*
(i) Für alle $x \in S(F)$ mit $x^{tr}x \in \mathcal{S}$ ist $\mathrm{Spur}(x^{tr}xR) = xRx^{tr} = 0$ und
(ii) Für alle $x \in S(F)$ mit $x^{tr}x \notin \mathcal{S}$ ist $\mathrm{Spur}(x^{tr}xR) = xRx^{tr} > 0$.

Der Seitenvektor R erzeugt also die Lösungsmenge des rationalen homogenen linearen GLS $xRx^{tr} = 0$ für alle $x \in S(F)$ mit $x^{tr}x \in \mathcal{S}$ und kann daher rational gewählt werden.

Satz 5.9 *Sei $n \geq 2$. Sei F perfekt und $\mathcal{S}$ eine Seite von $\mathcal{V}(F)$ mit Seitenvektor $R \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$. Dann ist R indefinit und es gibt ein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $xRx^{tr} < 0$.*

Beweis. Erinnerung: Ist $R \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ positiv semidefinit, so gibt es $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $TRT^{tr} = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$. Insbesondere ist das Radikal von R $\mathrm{rad}(R) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid vR = 0\} \leq \mathbb{R}^n$ genau die Menge aller isotroper Vektoren von R, $\mathrm{iso}(R) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid vRv^{tr} = 0\}$. Diese bilden also einen Teilraum von $\mathbb{R}^n$ der Dimension $d < n$. Also ist $\langle v^{tr}v \mid \mathrm{Spur}(v^{tr}vR) = 0\rangle$ ein Teilraum von $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ der Dimension

$$\leq \frac{d(d+1)}{2} \leq \frac{(n-1)n}{2} < \frac{n(n+1)}{2} - 1 = \dim(\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})) - 1.$$

Die Seite $\mathcal{S}$ hat aber Dimension $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ und wird von gewissen $v^{tr}v$ mit $v \in \mathrm{iso}(R)$ erzeugt. Also ist R indefinit.
Dann gibt es aber auch ein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $xRx^{tr} < 0$. Denn es gibt ein solches $x \in \mathbb{R}^n$ mit $xRx^{tr} \leq -\epsilon < 0$. Die Abbildung $x \mapsto xRx^{tr}$ ist stetig (als Polynom in n Unbestimmten) und $\mathbb{Q}^n$ liegt dicht in $\mathbb{R}^n$. Also kann man ein $y \in \mathbb{Q}^n$ finden mit $yRy^{tr} < 0$. Ist N der Hauptnenner der Koordinaten y_i, so ist $z := Ny \in \mathbb{Z}^n$ und $zRz^{tr} = N^2(yRy^{tr}) < 0$. □

Satz 5.10 *Seien F_1, F_2 symmetrische positiv definite Matrizen,*
(a) Sei $T \in \mathcal{V}(F_2)$ im relativen Inneren von $\mathcal{V}(F_1)$. Dann gilt $\mathcal{V}(F_1) \subset \mathcal{V}(F_2)$.
(b) Keine Matrix im Inneren des Voronoi-Bereichs einer perfekten Form liegt in irgendeinem anderen Voronoi-Bereich.

Beweis. (a) Œ sei $\min(F_1) = \min(F_2) =: m$. Sei $T \in \mathcal{V}(F_1) \cap \mathcal{V}(F_2)$. Dann gibt es $\lambda_x \geq 0$ mit

$$T = \sum_{x \in S(F_1)} \lambda_x x^{tr} x.$$

Dann ist

$$\mathrm{Spur}(TF_1) = \sum_{x \in S(F_1)} \lambda_x \,\mathrm{Spur}(x^{tr} x F_1) = m \sum_{x \in S(F_1)} \lambda_x$$

und

$$\mathrm{Spur}(TF_2) = \sum_{x \in S(F_1)} \lambda_x (x F_2 x^{tr}) \geq m \sum_{x \in S(F_1)} \lambda_x = \mathrm{Spur}(TF_1).$$

Ebenso findet man $\mathrm{Spur}(TF_1) \geq \mathrm{Spur}(TF_2)$ also $\mathrm{Spur}(TF_1) = \mathrm{Spur}(TF_2)$. Ist T im relativen Inneren von $\mathcal{V}(F_1)$, so sind alle $\lambda_x > 0$ und $\mathrm{Spur}(TF_1) = \mathrm{Spur}(TF_2)$ ist dann gleichbedeutend mit $xF_2x^{tr} = m$ für alle $x \in S(F_1)$ also $S(F_1) \subset S(F_2)$ und damit gilt dies auch für die von diesen Mengen aufgespannten Kegel, $\mathcal{V}(F_1) \subset \mathcal{V}(F_2)$.
(b) Ist F_1 in (a) zusätzlich perfekt, so ist F_1 durch die Gleichungen $xF_1x^{tr} = m$ für alle $x \in S(F_1)$ eindeutig bestimmt. Da F_2 diese Gleichungen nach dem Beweis von (a) auch erfüllt, gilt damit $F_1 = F_2$. □

Satz 5.11 *Sei F perfekt, $m := \min(F)$, R ein Seitenvektor zur Seite $\mathcal{S}$ von $\mathcal{V}(F)$ und $S := \{x \in S(F) \mid x^{tr}x \in \mathcal{S}\}$. Für $t \in \mathbb{R}$ setzen wir*

$$F_t := F + tR \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Es gibt ein eindeutig bestimmtes $\rho > 0$ so daß für $0 < t < \rho$ die Form F_t nicht perfekt ist und $\min(F_t) = m$ und für $t > \rho$ die Form F_t entweder nicht positiv definit ist, oder $\min(F_t) < m$ ist.
(b) Für $0 < t < \rho$ ist $S(F_t) = S$.
(c) Für $t < 0$ ist F_t entweder nicht positiv definit, oder $\min(F_t) < m$.
(d) Die Form F_ρ ist perfekt mit $\min(F_\rho) = m$. $\mathcal{S} = \mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(F_\rho)$ und F und F_ρ sind die einzigen perfekten Formen, deren Voronoi-Bereich $\mathcal{S}$ enthält.

Wir haben also

$t < 0:$ F_t nicht positiv definit oder $\min(F_t) < m$.

$t = 0:$ $F_t = F$.

$0 < t < \rho:$ $\min(F_t) = m$, $S(F_t) = S$ und F_t nicht perfekt.

$t = \rho:$ $\min(F_\rho) = m$, $S(F_\rho) \cap S(F) = S$, F_ρ perfekt und $\mathcal{V}(F) \cap \mathcal{V}(F_\rho) = \mathcal{S}$.

$t > \rho:$ F_t nicht positiv definit oder $\min(F_t) < m$.

Ende am 15.5.07

Beweis. (c) Ist $y \in S(F) - S$, dann ist $yRy^{tr} > 0$ und somit $yF_ty^{tr} = m + t(yRy^{tr}) < m$ für $t < 0$.
Nach Satz 5.9 gibt es ein $y \in \mathbb{Z}^n$ mit $yRy^{tr} < 0$. Also ist für großes t die Form F_t indefinit. Sei $T := \{t > 0 \mid \min(F_t) < m$ oder F_t nicht positiv definit $\}$. und $\rho := \inf(T)$ die größte untere Schranke von T.
Dann ist $\rho > 0$.
Zu (a) und (b): Sei $0 < t < \rho$. Nach Definition ist dann $\min(F_t) = m$. Es ist sicherlich $S \subset S(F_t)$ da $yRy^{tr} = 0$ für $y \in S$ und $S(F_t) \cap S(F) = S$. Sei $y \in S(F_t) - S$. Dann ist $yFy^{tr} > m$ und daher $yRy^{tr} = \frac{1}{t}(yF_ty^{tr} - yFy^{tr}) = m/t - yFy^{tr}/t < 0$. Ist nun $\epsilon > 0$ so ist $yF_{t+\epsilon}y^{tr} < m$ und daher $t + \epsilon \in T$. Dies ist ein Widerspruch zu $t < \rho = \inf(T)$.
Zu (d): Da $\min(F_t) < \min(F)$ ist für alle $t > \rho$ gibt es ein $y \in S(F_\rho)$ mit $yRy^{tr} < 0$. Da Projektionen entlang den Vektoren in $S \subset S(F_\rho)$ die Hyperebene $\langle \mathcal{S} \rangle$ in $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ erzeugen, die senkrecht zu R steht, gilt somit $\langle p_x \mid x \in \{y\} \cup S \rangle = \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ und daher ist F_ρ perfekt. Ist F' eine dritte perfekte Form, mit $S \subset S(F')$. Da $\mathcal{V}(F_\rho)$ und $\mathcal{V}(F)$ sich genau in der gemeinsamen Seite $\mathcal{S}$ schneiden und $\mathcal{V}(F') \supset \mathcal{S}$ eine echte Obermenge von $\mathcal{S}$ ist, gibt es einen gemeinsamen inneren Punkt von $\mathcal{V}(F')$ und einem der beiden Vornoi-Bereiche $\mathcal{V}(F)$ oder $\mathcal{V}(F_\rho)$. Mit Satz 5.10 folgt dann $F' = F$ oder $F' = F_\rho$. □

Definition 5.12 *Die Form F_ρ aus Satz 5.11 heißt* direkter perfekter Nachbar *von F zur Seite $\mathcal{S}$.*

Bemerkung 5.13 *Ist $m := \min(F) \in \mathbb{Q}$, so ist die perfekte Form F rational. Wählt man auch noch den Seitenvektor $R \in \mathbb{Q}^{n\times n}$, so ist ρ aus Satz 5.11 eine rationale Zahl.*

Beispiel 5.14 *Der Voronoi-Bereich von $\mathbb{A}_2$. Es ist $A_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $S(A_2)/\{\pm 1\} = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$. Da $|S(A_2)/\{\pm1\}| = \dim(\mathrm{Sym}_2(\mathbb{R})) = 3$ ist, ist $\mathcal{V}(A_2) \cap H$ ein Simplex, also hier ein Dreieck, wobei $H = \{X \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Spur}(X) = 1\}$ bezeichne. Die Ecken des Dreiecks sind $\mathcal{E} := \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$ die Seitenvektoren sind*

$$R_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, R_2 := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, R_3 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen direkten Nachbarn sind $A_2 + 2R_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 + 2R_2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 + 2R_3 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ und alle isometrisch zu A_2.

Übung: Bestimmen Sie die direkten Nachbarn von $\mathbb{A}_3$.

Ebenso wie den Hauptsatz 5.11 sieht man

Bemerkung 5.15 *Sei F eine nicht-perfekte positiv definite symmetrische Matrix mit $m := \min(F)$ und sei $R \in \mathcal{V}(F)^\perp$. Setzt man $F_t := F + tR$, so gibt es genau ein $\rho > 0$ so daß F_t*

Minimum m hat für $0 \leq t \leq \rho$ und nicht positiv definit oder von kleinerem Minimum ist für $t > \rho$. Weiter ist $\dim(\mathcal{V}(F_\rho)) > \dim(\mathcal{V}(F))$.

Beweis. Als Übung. $\square$

Beispiel: Sie $F = I_2$. Dann ist $\mathcal{V}(F) = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_i \geq 0\}$ mit Ecken $\mathrm{diag}(1,0)$ und $\mathrm{diag}(0,1)$ und $\mathcal{V}(F)^\perp = \langle R := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$. Dann ist $F + \frac{1}{2}R$ perfekt.

Diese Bemerkung erlaubt es, zu einer gegebenen Form eine perfekte Form zu finden. Mit Satz 5.11 kann man dann alle direkten Nachbarn dieser perfekten Form bestimmen.

Übung: Wenden Sie diesen Algorithmus auf $F = I_3$ an.

Definition 5.16 *Der* Voronoi Graph *ist ein Graph, dessen Ecken genau die endlich vielen Ähnlichkeitsklassen perfekter Formen der Dimension n sind. Zwei Ecken sind durch eine Kante verbunden, genau dann, wenn geeignete Vertreter direkte Nachbarn sind.*

Satz 5.17 *Der Voronoi-Graph ist ein endlicher zusammenhängender Graph.*

Beweis. Die Endlichkeit haben wir schon in Satz 4.14 gesehen. Es genügt daher zu zeigen, dass es für je zwei perfekte Formen F und F' mit gleichem Minimum m eine Kette $F = F_0, F_1, \ldots, F_s = F'$ perfekter Formen mit Minimum m gibt, so dass F_{i-1} und F_i direkte Nachbarn sind ($1 \leq i \leq s$). Dazu wählen wir uns einen inneren Punkt $Q' \in \mathcal{V}(F')$. Ist $Q' \in \mathcal{V}(F)$ so ist $F = F'$ nach Satz 5.10. Ansonsten gibt es einen Seitenvektor R von F, so daß $\mathrm{Spur}(RQ') < 0$. Sei $F_1 := F + \rho R$ die zu F über den Seitenvektor R direkt benachbarte Form. Dann ist $\mathrm{Spur}(F_1 Q') < \mathrm{Spur}(FQ')$. Ist $Q' \in \mathcal{V}(F_1)$, so ist $F_1 = F'$ nach Satz 5.10. Ansonsten können wir $\mathrm{Spur}(F_i Q')$ immer weiter verkleinern. Dies ist ein endlicher Prozess nach dem folgenden Satz. $\square$

Satz 5.18 *Sei Q' eine positiv definite Form und seien $K, m > 0$. Dann ist*

$$\{F \in \mathrm{Sym}_n^{>0}(\mathbb{R}) \mid \min(F) = m, F \text{ ist perfekt und } \mathrm{Spur}(FQ') < K\}$$

endlich.

Beweis. Zum Beweis benutzen wir das folgende leichte Lemma

Lemma 5.19 *Seien Q, Q' zwei positiv definite symmetrische Matrizen.*
$\mu := \min\{xQx^{tr} \mid x \in \mathbb{R}^n, xx^{tr} = 1\}$.
Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von Q', so ist

$$0 < \lambda_i \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \leq \frac{1}{\mu} \mathrm{Spur}(QQ')$$

Beweis. Sei $(b_1, \ldots, b_n)$ eine ON-Basis aus Eigenvektoren von Q'. Ist M die Matrix von Q bezüglich dieser Basis, so ist

$$\mathrm{Spur}(QQ') = \mathrm{Spur}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i M_{ii} \geq \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

□

Ende am 18.5.2007

Bezeichne nun μ das Minimum von Q' auf der Einheitssphäre und sei F wie in Satz 5.18 mit Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und $m = \min(F)$. Nach der Hermite Ungleichung gilt dann

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(F) \geq \frac{m^n}{\gamma_n^n}.$$

Wegen Lemma 5.19 gilt außerdem

$$0 \leq \lambda_i \leq \frac{K}{\mu} \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Also gibt es ein $a > 0$ (z.B. $a = \frac{m^n}{\gamma_n^n} \frac{\mu^{n-1}}{K^{n-1}}$) mit $\lambda_i > a$ für alle i. In einer ON-Basis $B := (b_1, \ldots, b_n)$ aus Eigenvektoren von F gilt dann für einen Vektor $x = \sum_{i=1}^n y_i b_i \in S(F)$, daß

$$m = xFx^{tr} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \geq a \sum_{i=1}^{n} y_i^2.$$

Dies beschränkt die Beträge der Komponenten von $x \in \mathbb{Z}^n$ in der festen Basis B. Also ist x in der endlichen Menge

$$\{x \in \mathbb{Z}^n \mid x_B x_B^{tr} \leq \frac{m}{a}\}.$$

Diese Menge hat nur endlich viele Teilmengen, also gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für $S(F)$ und damit für die perfekte Form F nach Satz 4.10. □

Bemerkung 5.20 *Sei F perfekt, R ein Seitenvektor von $\mathcal{V}(F)$ zur Seite $\mathcal{S}$ und $g \in \mathrm{Aut}(F)$. Dann ist auch gRg^{tr} ein Seitenvektor von $\mathcal{V}(F)$. Ist $F_1 = F + \rho R$ ein direkter perfekter Nachbar zur Seite $\mathcal{S}$, so ist auch $F_2 := gF_1g^{tr} = F + \rho gRg^{tr}$ ein direkter perfekter Nachbar von F. F_1 und F_2 sind isometrisch also genügt es bei der Bestimmung des Voronoi-Graphen Vertreter der Bahnen von $Aut(F)$ auf den Seiten von $\mathcal{V}(F)$ zu betrachten.*

Satz 5.21 *Die direkten perfekten Nachbarn von $\mathbb{A}_n$ sind alle isometrisch zu $\mathbb{A}_n$ falls $n \leq 3$ ist und zu $\mathbb{D}_n$ falls $n \geq 4$ ist.*

Beweis. Nach Lemma 2.19 operiert die Weyl Gryppe $W(\mathbb{A}_n) \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_n)$ transitiv auf der Menge der Wurzeln $S(\mathbb{A}_n)$. Schneidet man den Voronoi-Bereich $\mathcal{V}(\mathbb{A}_n)$ mit der Hyperebene $H := \{X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Spur}(X) = 1\}$, so erhält man einen konvexen Polyeder der Dimension $n(n+1)/2-1$ mit genau $|S(\mathbb{A}_n)|/2 = n(n+1)/2$ Ecken. Dieser ist daher ein Simplex, dessen

Seiten genau $n(n+1)/2-1$ Ecken enthalten. ($\mathcal{V}(\mathbb{A}_n)$ ist ein sogennanter simplizialer Kegel.) Insbesondere operiert $W(\mathbb{A}_n)$ auch transitiv auf den Seiten von $\mathcal{V}(\mathbb{A}_n)$. Nach Bemerkung 5.20 sind daher alle direkten Nachbarn von $\mathbb{A}_n$ isometrisch. Es genügt also einen direkten Nachbarn von $\mathbb{A}_n$ zu bestimmen. Dazu rechnen wir wieder mit der Grammatrix $A_n := I_n + J_n$ von $\mathbb{A}_n$ aus Beispiel 4.18. In dieser Basis ist $S(A_n) = \{\pm e_i, \pm(e_j - e_k) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j < k \leq n\}$. Sei $T_i := e_i^{tr} e_i = \operatorname{diag}(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ und $T_{jk} := (e_j - e_k)^{tr}(e_j - e_k)$. Dann ist $(T_{jk})_{xy} = 0$ falls $\{x,y\} \not\subset \{j,k\}$, $(T_{jk})_{jj} = (T_{jk})_{kk} = 1$ und $(T_{jk})_{jk} = (T_{jk})_{kj} = -1$. Sei $\mathcal{S}$ die Seite die alle Ecken von $\mathcal{V}(\mathbb{A}_n)$ bis auf T_{12} enthält. Dann ist

$$R := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

ein Seitenvektor zu dieser Seite und $A_n + R =: D_n$ ist eine Grammatrix des perfekten Gitters

$$\mathbb{D}_n = \langle e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n \rangle$$

(falls $n \geq 4$) bzw. von A_3 für $n = 3$. Also ist dies der direkte Nachbar von $\mathbb{A}_n$ zur Seite $\mathcal{S}$. Ist $n = 2$, so ist $A_n + R$ nicht perfekt, hat aber noch Minimum 2. Der direkte Nachbar für $n = 2$ ist dann $A_n + 2R = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ und isometrisch zu $\mathbb{A}_2$. □

Folgerung 5.22 $\operatorname{Perf}_2 = \{[\mathbb{A}_2]\}$ *und* $\operatorname{Perf}_3 = \{[\mathbb{A}_3]\}$.

Beispiel Die Voronoi-Graphen in Dimension 2,3,4,5.

Satz 5.23 $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}_4)$ *hat 2 Bahnen auf den Seitenvektoren von* $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$. *Die entsprechenden direkten perfekten Nachbarn sind isometrisch zu* $\mathbb{D}_4$ *bzw.* $\mathbb{A}_4$.

Beweis. Wir rechnen bezüglich einer Basis von $\mathbb{Z}^4$ und benutzen die Beschreibung

$$\mathbb{D}_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum x_i e_i \in \mathbb{Z}^4 \mid \sum x_i \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Dann ist $S(\mathbb{D}_4) = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\}$ und $|S(\mathbb{D}_4)|/2 = 12$. Weiter ist $\dim(\operatorname{Sym}_4(\mathbb{R})) = 10$. In jeder Seite von $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$ liegen also mindestens 9 Ecken. Wir bestimmen also die Bahnen von $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}_4)$ auf den 1, 2, und 3-elementigen Teilmengen von $S(\mathbb{D}_4)/\pm 1$. $\operatorname{Aut}(\mathbb{D}_4)$ ist transitiv auf $S(\mathbb{D}_4)$. Der Stabilisator von $\{\pm(e_1 + e_2)\}$ hat 3 Bahnen auf $S(\mathbb{D}_4)/\pm 1$ gemäss der 3 möglichen Skalarprodukte $0, \pm 1, \pm 2$. Durch explizites Nachrechnen sieht man die folgenden 3 Behauptungen.
Behauptung1: Vertreter dieser Bahnen sind $\{\pm(e_1 - e_2)\}$, $\{\pm(e_1 + e_3)\}$, $\{\pm(e_1 + e_2)\}$
Behauptung2: $\langle x^{tr} x \mid x \in S(\mathbb{D}_4) - \{\pm(e_1 + e_3), \pm(e_1 + e_2)\}\rangle = \operatorname{Sym}_4(\mathbb{R})$.
Behauptung3: $H := \langle x^{tr} x \mid x \in S(\mathbb{D}_4) - \{\pm(e_1 - e_2), \pm(e_1 + e_2)\}\rangle$ ist eine Hyperebene in $\operatorname{Sym}_4(\mathbb{R})$, welche jedoch keine Seite von $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$ ist.

Dass H eine Hyperebene ist, rechnet man wieder leicht nach. $H^\perp = \langle R := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle$.
Die beiden Skalarprodukte $\mathrm{Spur}(R(e_1-e_2)^{tr}(e_1-e_2))$ und $\mathrm{Spur}(R(e_1+e_2)^{tr}(e_1+e_2))$ haben unterschiedliches Vorzeichen, also ist H keine Seite von $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$.
Also gibt es keine 10 Ecken von $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$ die in einer Seite von $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$ liegen und somit enthält jede Seite $\mathcal{S}$ von $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$ genau 9 Ecken. Die drei Paare $\pm x_i \in S(\mathbb{D}_4)$ mit $x_i^{tr}x_i \notin \mathcal{S}$ erfüllen nach Behauptung 3 ausserdem $(x_i, x_j) \neq 0$. Es bleibt also mit Behauptung 1 die Fälle $x_1 = e_1 + e_2$, $x_2 = e_1 + e_3$ und $x_3 \in \{e_2 - e_3, e_2 + e_3, e_1 + e_4, e_1 - e_4\}$ zu betrachten. Die Matrix $\mathrm{diag}(1, 1, 1, -1) \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}_4)$ fixiert x_1 und x_2 und bildet $e_1 + e_4$ auf $e_1 - e_4$ ab. Die Spiegelung σ_v entlang des Vektors $v = \frac{1}{2}(e_1 - e_2 - e_3 + e_4)$ ist ein Automorphismus von $\mathbb{D}_4$, da $2v \in \mathbb{D}_4$, $(v, v) = 1$ und $v \in \mathbb{D}_4^{\#}$. Es ist $\sigma_v(x_1) = x_1$ und $\sigma_v(x_2) = x_2$, da $x_i \in v^\perp$ und $\sigma_v(e_2 + e_3) = e_1 + e_4$. Also genügt es, die beiden Fälle $x_3 = e_2 - e_3$ und $x_3 = e_2 + e_3$ zu betrachten. Da die Gitter $\langle x_1, x_2, x_3\rangle \cong A_2$ bzw. A_3 unterschiedlich sind, haben wir gezeigt, dass die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\mathbb{D}_4)$ genau 2 Bahnen auf den Seiten von $\mathcal{V}(\mathbb{D}_4)$ hat. Die entsprechenden Seitenvektoren ergeben sich als

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ bzw. } R' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

mit zugehörigen perfekten Nachbarn $F = T(I_4 + \frac{1}{2}R)T^{tr} \cong D_4$ bzw. $F' = T(I_4 + \frac{1}{2}R')T^{tr} \cong A_4$ wo $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

Folgerung 5.24 $\mathrm{Perf}_4 = \{[\mathbb{A}_4], [\mathbb{D}_4]\}$.

Übung: Bestimmen Sie die perfekten direkten Nachbarn von $\mathbb{D}_5$.

Bemerkung 5.25 *Der Voronoi-Bereich $\mathcal{V}(\mathbb{E}_8)$ hat 25075566937584 Seiten die in 83092 Bahnen unter $\mathrm{Aut}(\mathbb{E}_8)$ fallen. Alle bis auf 2 perfekte Formen in Dimension 8 sind direkte Nachbarn von $\mathbb{E}_8$.*